



# Quelques résultats sur les billards mathématiques

Sacha Cardonna, Samuel Raë

Université de Montpellier

`cardonna.sacha@gmail.com, samuel.rae12@yahoo.fr`

juin 2021

## Introduction

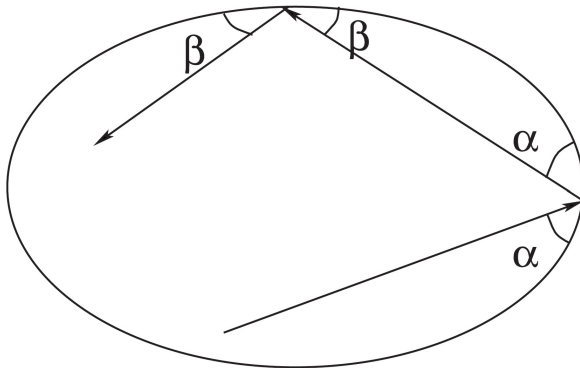


Figure 1 : *Un billard elliptique*



## Plan de la présentation

### 1 Introduction

- Premières définitions et motivation
- Principe de Fermat et loi de Snell-Descartes
- Réduction à un système à temps discret

### 2 Billard circulaire à réflexion élastique

- Mise en place du problème
- Relation entre  $I$  et  $\mathbb{U}$ , trajectoires périodiques
- Existence de cercles caustiques

### 3 Étude du billard elliptique

- Modélisation du billard
- Étude des caustiques
- Étude des trajectoires périodiques
- Étude d'une trajectoire remarquable



# Introduction au billard mathématique



## Qu'est-ce qu'un billard mathématique ?

### Définition

Un billard mathématique est un système dynamique.

On s'intéressera au billard dans un cercle, et dans une ellipse.

On considère que la bille se déplace sur la table sans frottements, avec une vitesse constante unitaire, et rebondit au bord selon la loi de Snell-Descartes.



## Intérêt dans l'étude du billard

### Principe de Fermat

Dans un milieu homogène, la lumière se propage suivant la trajectoire qui minimise le temps de parcours.

### Loi de Snell-Descartes

Il existe une relation liant les indices de réfraction  $n_1$  et  $n_2$  de chacun des milieux et les angles incidents  $\theta_1$  et réfracté  $\theta_2$ , de sorte que

$$n_1 \cdot \sin \theta_1 = n_2 \cdot \sin \theta_2$$

Le billard est assimilé à un milieu d'indice de réfraction du vide, et la trajectoire de la bille est donnée par les lois de l'optique géométrique.



## L'ensemble discret des rebonds

### Proposition

Les billards sont des systèmes dynamiques à temps continu. Ici, on étudiera seulement en détails l'ensemble des rebonds de la bille sur le bord de la table, donc le billard en temps discret.



# Billard circulaire à réflexion élastique





## Notations

### Billard

Si  $D$  est le disque unité de  $\mathbb{R}^2$ , le billard est assimilé à

$$\partial D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} := \mathbb{U}$$

### Rebonds

L'ensemble des rebonds sur le bord est noté

$$I = \{x_k \in \partial D \mid k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{U}$$



## Résultats importants sur les trajectoires

### Lemme

Soit  $\theta \in [0, 2\pi[$ , tel que  $\frac{\theta}{2\pi} \notin \mathbb{Q}$ . Alors la partie  $\theta\mathbb{N} + 2\pi\mathbb{Z}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

### Proposition

Soit  $I$  l'ensemble des rebonds. On a 2 cas possibles:

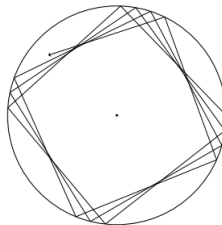
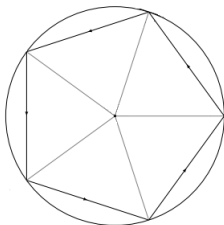
$$-\exists p \in \mathbb{N}^*, I = \cup_p$$

$$-I \text{ est dense dans } \mathbb{U}$$



Relation entre  $I$  et  $\mathbb{U}$ , trajectoires périodiques

## Une représentation des 2 cas possibles





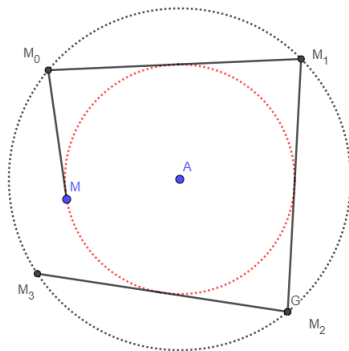
## Un théorème important

### Caustique

Soit  $(x_n)$  une suite de rebonds sur le bord du billard, telle que le segment  $[M_0, M_1]$  ne rencontre pas l'origine. Il existe un unique cercle  $C$  de centre  $O$  et de rayon  $\rho < 1$ , appelé **cercle caustique**, tel que chaque segment  $[M_k, M_{k+1}]$  de la trajectoire de la boule soit tangent à  $C$ .



## Illustration des caustiques





# Étude du billard elliptique



## Notations

### Billard

Notons  $\mathbb{U} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + y^2 < 1\}$ . On assimile le billard à  $\partial\mathbb{U}$ .

### Foyers

En prenant un repère du plan dont l'origine est l'intersection du petit et du grand axe, on note les foyers  $F_1 = (-\sqrt{3}, 0)$ , et  $F_2 = (\sqrt{3}, 0)$



## Résultats préliminaires

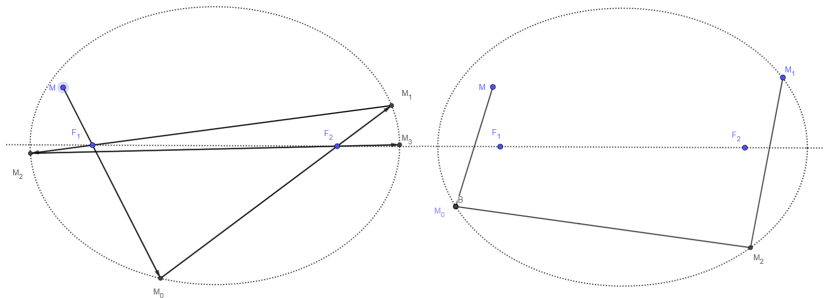
### Lemme

Supposons que la particule soit lancée en un point  $M$  d'affixe  $x$  et rebondisse au bord en  $x_0$ , on a alors deux cas possibles :

- Si  $(-\sqrt{3}, 0) \in [M, M_0]$ , ou  $(\sqrt{3}, 0) \in [M, M_0]$  alors  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $(\sqrt{3}, 0) \in [M_k, M_{k+1}]$  ou  $(-\sqrt{3}, 0) \in [M_k, M_{k+1}]$ .
- Sinon,  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $(\sqrt{3}, 0) \notin [M_k, M_{k+1}]$  et  $(-\sqrt{3}, 0) \notin [M_k, M_{k+1}]$ .



## Illustration des deux cas





## Résultats préliminaires

### Lemme

Supposons que la particule est lancée depuis un point d'affixe  $x$  à l'intérieur de la table, notons  $(x_n) \in I^{\mathbb{N}}$  la suite des rebonds,  $(M_n)$  la suite des points associée. On a alors deux possibilités concernant la trajectoire après le rebond suivant :

- Si  $[MM_0] \cap ]F_1F_2[ \neq \emptyset$  ; alors  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $[M_kM_{k+1}] \cap ]F_1F_2[ \neq \emptyset$  .
- Si  $[MM_0] \cap ]F_1F_2[ = \emptyset$  ; alors  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $[M_kM_{k+1}] \cap ]F_1F_2[ = \emptyset$  .





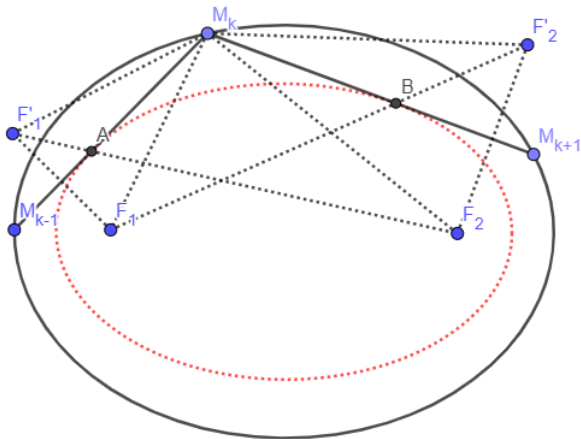
## Caractérisation des caustiques

### Théorème

On suppose que la particule est lancée depuis un point  $M$  d'affixe  $x$  de la table, de sorte que  $F_1, F_2 \notin [MM_0]$ . Alors il existe une caustique qui est une conique confocale à l'ellipse  $\partial\mathbb{U}$  telle que chaque segment de trajectoire  $[M_k M_{k+1}]$  est tangent à cette conique. Plus précisément :

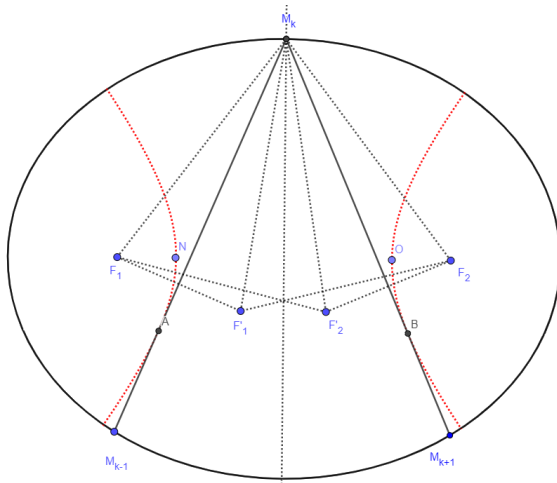
- Si  $[MM_0] \cap ]F_1, F_2[ \neq \emptyset$ , la conique est une hyperbole.
- Si  $[MM_0] \cap ]F_1, F_2[ = \emptyset$ , la conique est une ellipse.

## Une caustique elliptique





## Une caustique hyperbolique





## Quelques définitions

### Définition

On appelle **trajectoire n-périodique** un  $n$ -uplet  $(x_1, \dots, x_n)$  de points consécutifs de  $\partial\mathbb{U}$ , telle que la figure orientée obtenue en traçant les segments  $[M_k, M_{k+1}]$  constitue une trajectoire périodique de la particule de point de départ  $x_1$  et de point d'arrivée  $x_{n+1} = x_1$  dans le billard.

### Définition

On définit l'**espace des configurations cycliques**  $G(\partial\mathbb{U}, n)$ , comme suit:  

$$G(\partial\mathbb{U}, n) = \{(x_1, \dots, x_n) \in (\partial\mathbb{U})^n \mid x_{i+1} \neq x_i, \forall i = 0, \dots, n-1\}$$

### Définition

On définit le **nombre de rotation de la trajectoire**  $(x_1, \dots, x_n)$  comme le nombre  $r = \frac{m}{n}$ , où  $m$  est le nombre de tours que la bille a fait autour de la table de billard en parcourant la trajectoire  $(x_1, \dots, x_n)$ .



## Résultat important

### Proposition

Soit  $(x_1, \dots, x_n) \in G(\partial\mathbb{U}, n)$ . Considérons la fonction

$$L : G(\partial\mathbb{U}, n) \longrightarrow \mathbb{R}$$

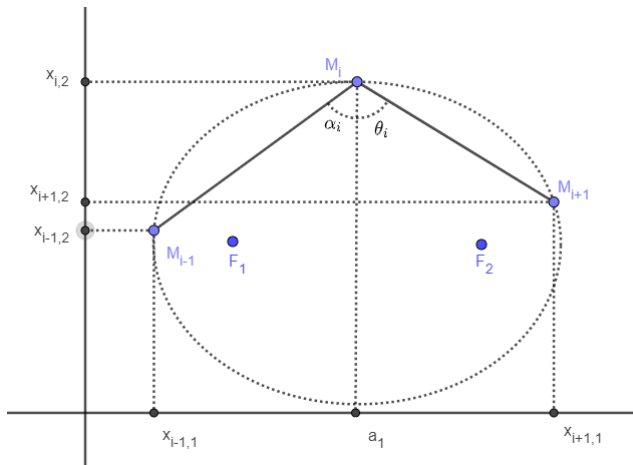
$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto d(x_1, x_2) + \dots + d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_1)$$

où  $d$  mesure la distance entre les points du cercle. Alors cette fonction est différentiable, et ses points critiques fournissent des trajectoires  $n$ -périodiques





## Illustration





## Théorème de Birkhoff

### Remarque

On admet qu'en tant qu'espace topologique,  $G(\partial\mathbb{U}, n)$  n'est pas connexe, et ses composantes connexes sont les sous-ensemble des trajectoires de rotation fixée  $r$ , et sont homéomorphes à  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n-1}$  (où  $\mathbb{S}^{n-1}$  est la boule unité de dimension  $n - 1$ ).

### Théorème

Soit  $n \geq 2$ , et  $r \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ , premier avec  $n$ . Alors il existe deux trajectoires géométriques distinctes  $n$ -périodiques de nombre de rotation  $r$ .

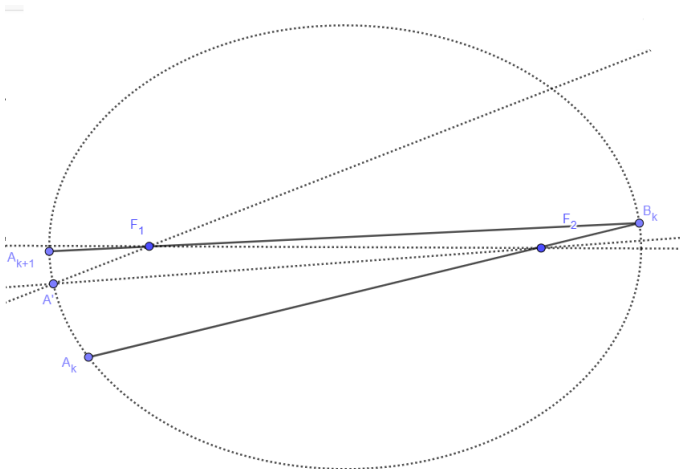


## Proposition

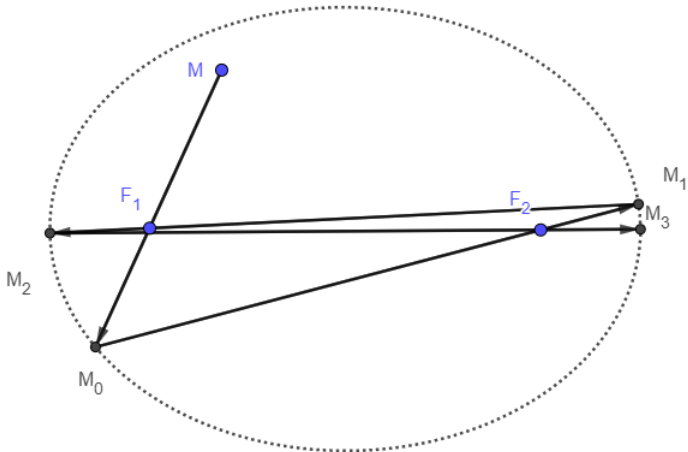
Supposons que l'on lance la particule contre le bord du billard depuis un point  $M$ ,  $M_0$  le point du premier rebond sur le bord, tel que  $F_1 \in [MM_0]$  ou  $F_2 \in [MM_0]$ . Alors si  $n$  est le nombre de rebonds sur le bord, la suite des segments de trajectoire  $[M_n, M_{n+1}]$  de la particule tend vers le grand axe quand  $n$  vers  $+\infty$



## Illustration de la preuve



# Illustration de la trajectoire





## BIBLIOGRAPHIE

- [1] Jean-Christophe YOCCOZ. *Conférence : systèmes dynamiques et billards*. Institut Henri Poincaré, 2011.
- [2] Marcin PULKOWSKI & Pierre MONTAGNON. *Exercices de mathématiques pour l'agrégation interne*. Ellipses, 2018.
- [3] Serge TABACHNIKOV. *Billiards*. Société mathématique de France, 1995.
- [4] Serge TABACHNIKOV. *Geometry and billiards*. Student Mathematical Library, 2005.